

Εξετάσεις Ιούνιος 2025 - Απειροστικός Λογισμός 2

Διδάσκοντας Ε. Νικολιδάκης

Θέμα 1

- (i) (1 μον.) Έστω ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2$ συγκλίνει απόλυτα.
- (ii) (0.5 μον.) Δίνεται η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n^2-1}$. Να δείξετε ότι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της εν λόγω σειράς αποκλίνει προς το $+\infty$.
- (iii) (0.75 μον.) Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{3/2}}$.
- (iv) (0.75 μον.) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου ή ρίζας για απόλυτες τιμές, να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n8^n}$ και έπειτα να προσδιορίσετε τις τιμές των $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η δυναμοσειρά συγκλίνει.

Θέμα 2

- (i) (1.5 μον.) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3, x > 0$ και $g(x) = \frac{1}{x^3}, x > 0$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$, να εξετάσετε αν η $f|_{(0,2)}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και να εξετάσετε αν η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$ (για το πρώτο από τα τρία παραπάνω ερωτήματα χρησιμοποιήστε αποκλειστικά την Αρχή της Μεταφοράς για ομοιόμορφη συνέχεια).
- (ii) (1.25 μον.) Δίνονται $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Χρησιμοποιώντας αποκλειστικά και μόνο την Αρχή της Μεταφοράς για ομοιόμορφη συνέχεια να δείξετε ότι η συνάρτηση $f + 2g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A .

Θέμα 3

- (i) (1.25 μον.) Δίνονται αύξουσα συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και ακολουθία διαμερίσεων $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}, n \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε τα $L(f, P_n)$ και $U(f, P_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, 1]$.
- (ii) (1.25 μον.) Δίνεται φραγμένη συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

$$\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f} \leq \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \cdot (b - a)$$

Θέμα 4

- (i) (1 μον.) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{(x-3)(x-4)} dx$ και $\int \frac{\cos(x^{1/3})}{x^{2/3}} dx$
- (ii) (0.75 μον.) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x})} dx$$